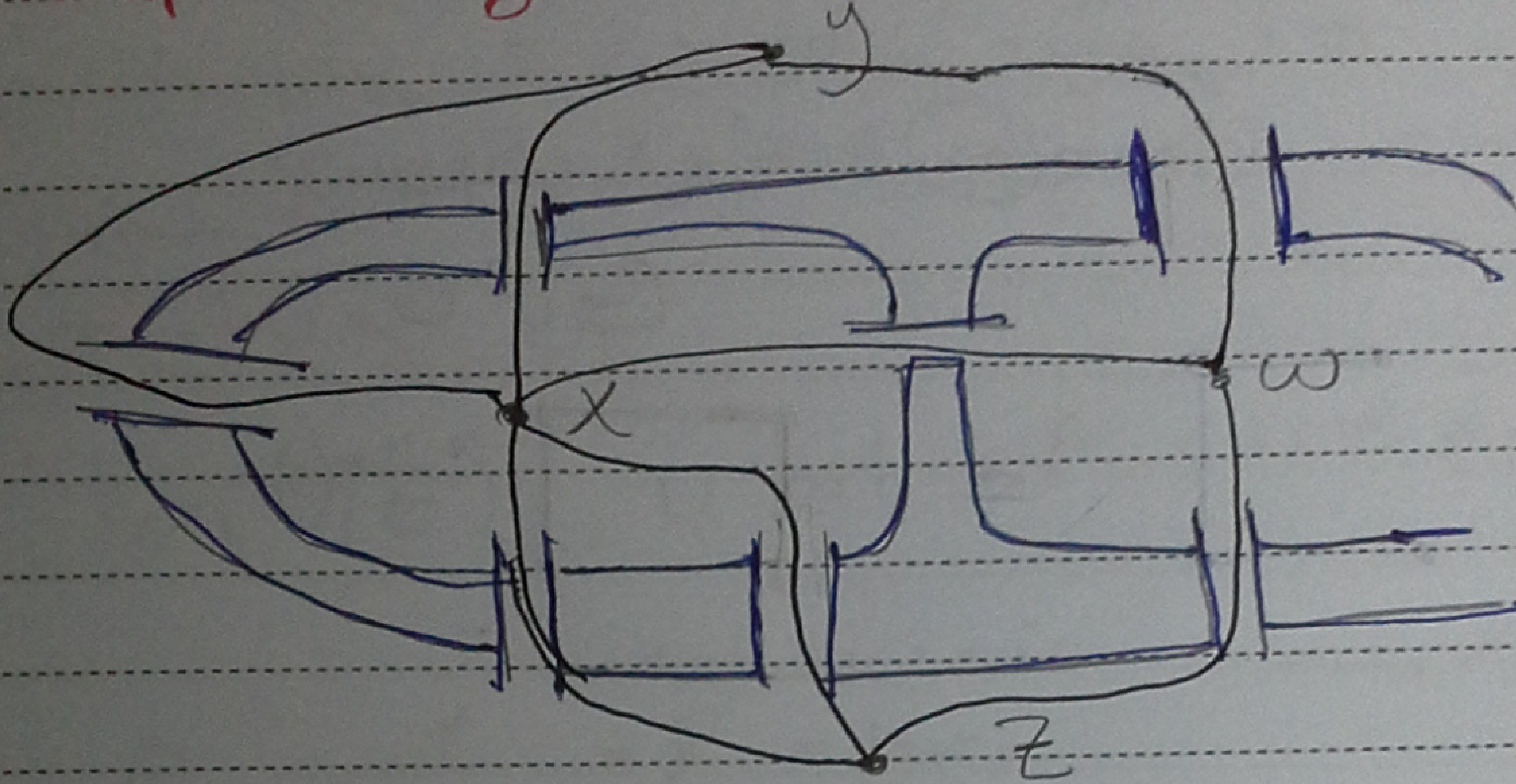
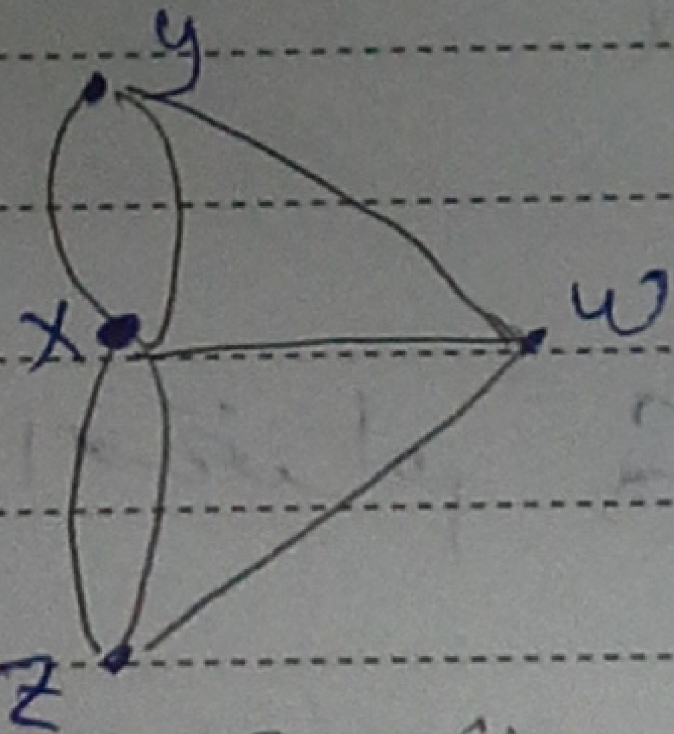
محاضرة 2 — د. محمد شكري — الاثنين — 20/10/2014

نظرية المخططات — Graph theory



* بدأت نظرية المخططات بواسطة العالم Euler بأنه حاول التفكير في تحويل خريطة 7 جزر إلى مخطط يمكن المرور على أحرف كل حرف مرة واحدة *

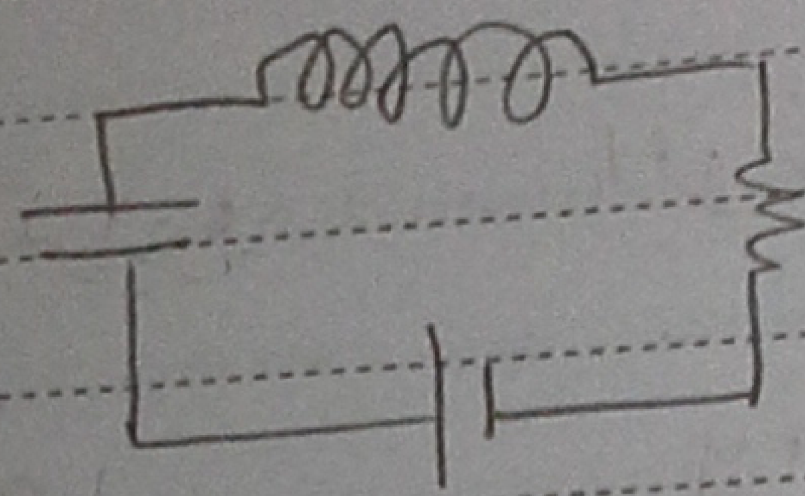
من هذه الطريقة للتفكير بدأت تظهر مجالات جديدة بين عدد الرؤوس وعدد الأحرف وإيجاد علاقات جديدة بينها وطريقة السير على المخططات.



* بعض التطبيقات الهندسية للـ Graph

① الدوائر الكهربية

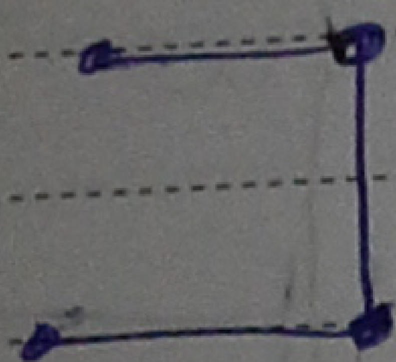
يمكن تمثيل أي دائرة كهربية إلى مخطط حيث نعبر عن الملفات والمقاومات والمكثفات ومصدر التيار بأحرف، إذا كان المخطط الناتج Connected أي كل نقطتين يمكن أن نوصلهما بمسار مغلق تكون الدائرة تصميمها صحيح، وإذا حدث العكس يكون التصميم خاطئ، مثل:



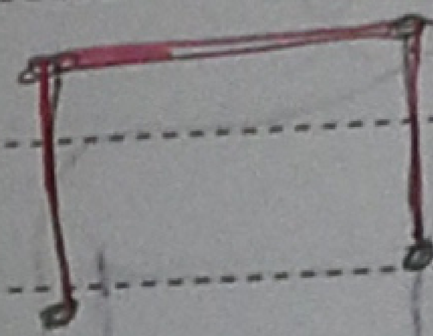
لأنه الملف يظهر s.c ، والمكثف يظهر o.c

ℓℓℓℓ & —||— ، —|⊢ ، (~) ، ⊤

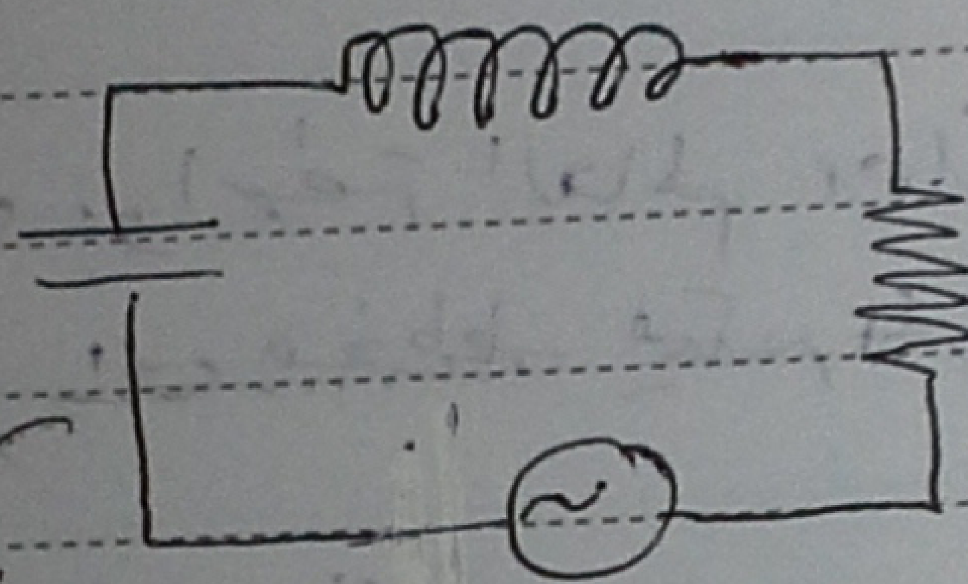
يعبروا بأحرف في G

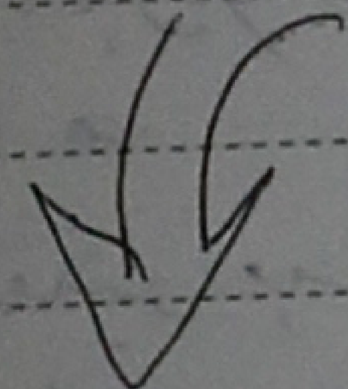


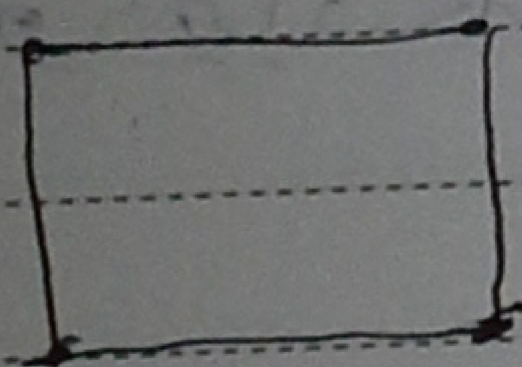
=



node

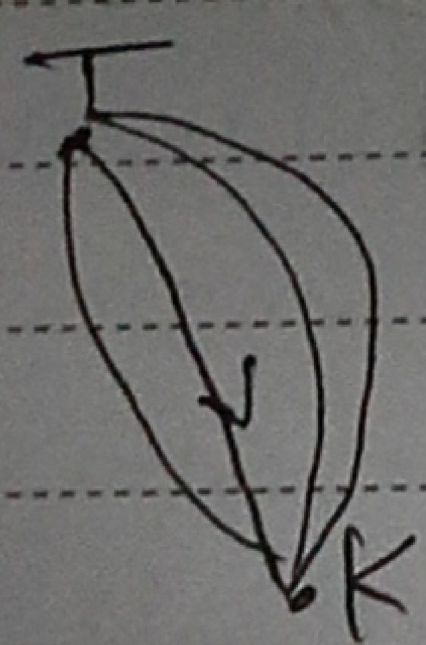






Connected

② استخدام G (Graph) في توصيل الطرق بالفروع



في هذه الجزئية نتعامل مع الطرق على أنها E. وخصوصاً مع الطرق بين المدن على أنها أحرف (يمكن) هنا مناقشة قضايا عديدة من خلال الـ (G) مثل كيفية عزل نقطة ، كيفية زيادة الـ flow على الطريق ، كيفية توصيل مدينة جديدة بجميع الطرق القديمة

أهم ما يُقرأ في هذا الجزء هو ford Algorithm

Date/ Page/

③ استخدام الـ (G) في الـ Image .
في تحليل الصور وذلك بعد تقسيم الصورة إلى Pixels وذلك بأن
نجعل النقاط في الصورة ذات لون معين توصف بالرؤوس والأحرف
تكون طريقة الترابط مع المتجاور معها .

④ استخدام الـ (G) في بدورة الدموية والعصبية

Defⁿ ① Graph

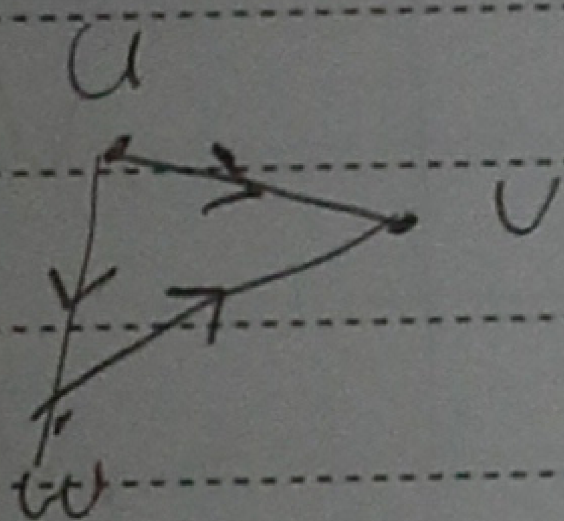
$G=(V,E)$, V set of vertices

المخطط هو مجموعة مركبة من الأحرف والرؤوس

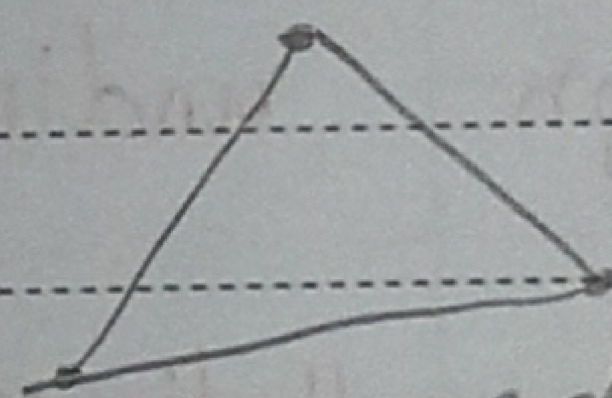
E = set of edges

Defⁿ ② Directed graph

هو مخطط يكون اتجاه الحرف فيه مهم مثل :



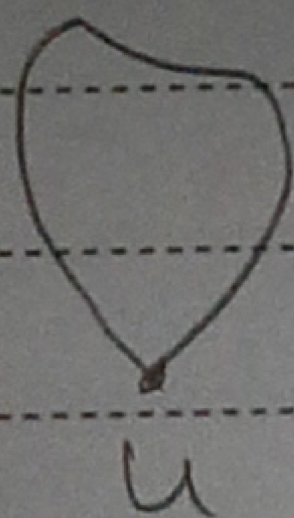
directed graph

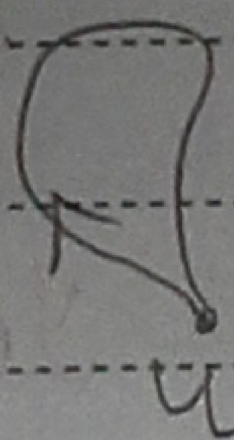

undirected graph

Defⁿ ③ Loop.

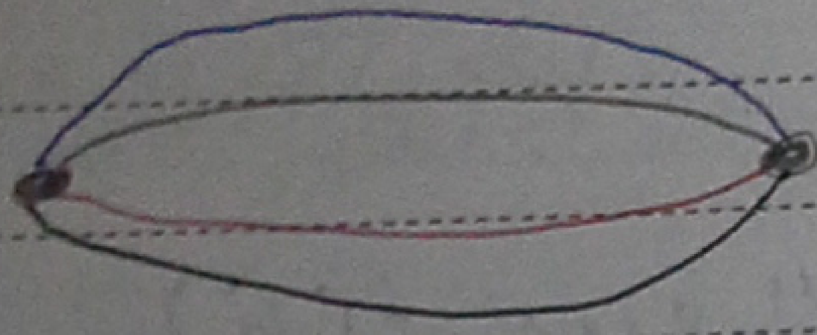
عبارة عن Edge يبدأ وينتهي بنفس النقطة

* هو حرف يربط نقطة واحدة بنفسها





④ Multiple edges أحرف متكررة

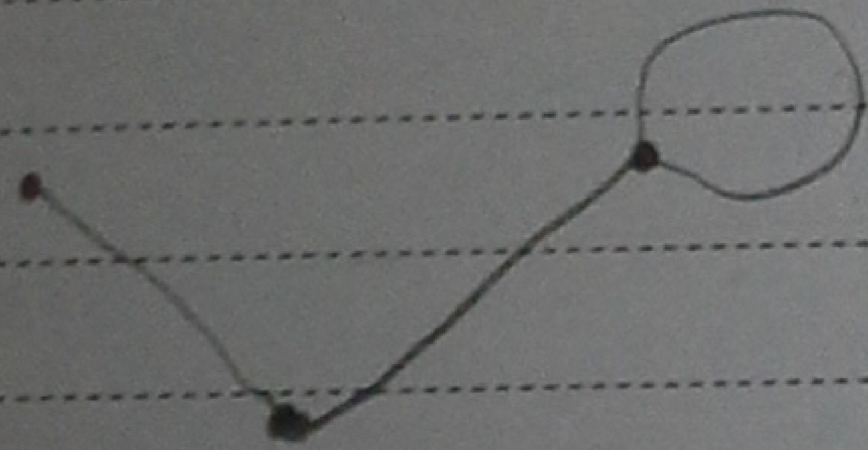


⑤ Multigraph

إذا احتوى الـ G على أحرف متكررة يسمى Multigraph

⑥ Pseudo graph

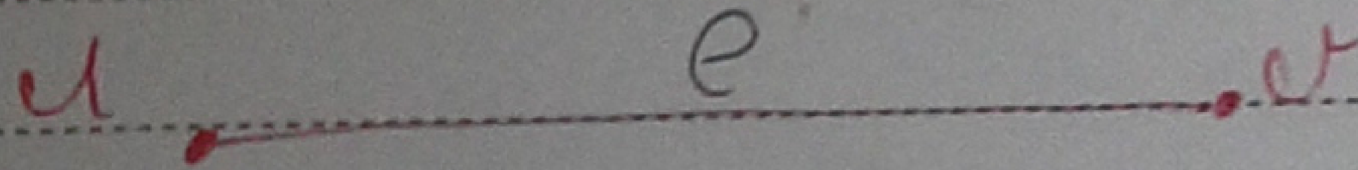
رسمة تحتوي على Loop



Type	Edge	Muti edge	loops
① simple graph	undireted	NO	NO
② Multi graph	Undirected	Yes	NO
③ pseudo graph	undirected	Yes	Yes
④ Directed graph	directed	NO	Yes
⑤ Directed Multigraph	directed	Yes	yes

Terminology : for undirected graph مفاهيم

① Adjacent, incident, end points



يسمى u, v ب Adjacent (بينهم edge)
e ك incident لكل من u, v (حرف لكل واحد منهم)
end point هي نقطة النهاية لأي ضلع، محددين بخط

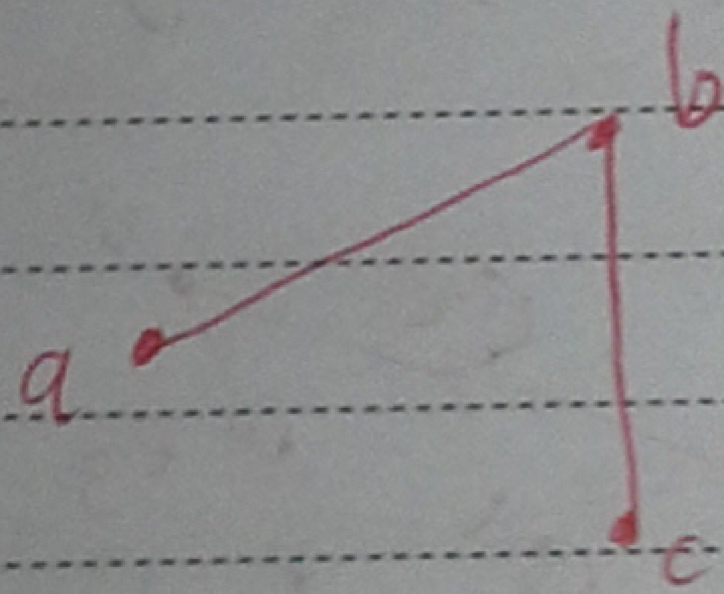
u, v are adjacent
u, e and v, e are ~~ind~~ incidents

② degree (v)

درجة الرأس هي عدد الأحرف المرتبطة بالرأس

Ex:

deg(a) = 1



deg(b) = 2

deg(c) = 1

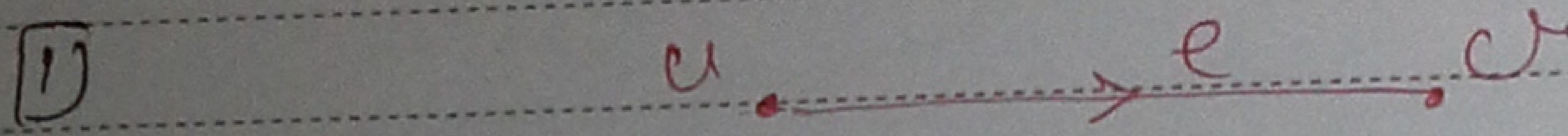
③ Isolated vertex

deg(point) = 0 هي جميع النقط التي درجتها صفر
* لا يوجد لها edges

④ Pendand Vertex هي الرأس التي درجتها = 1
يعني لها edge واحدة فقط

Terminology - Directed graph

1

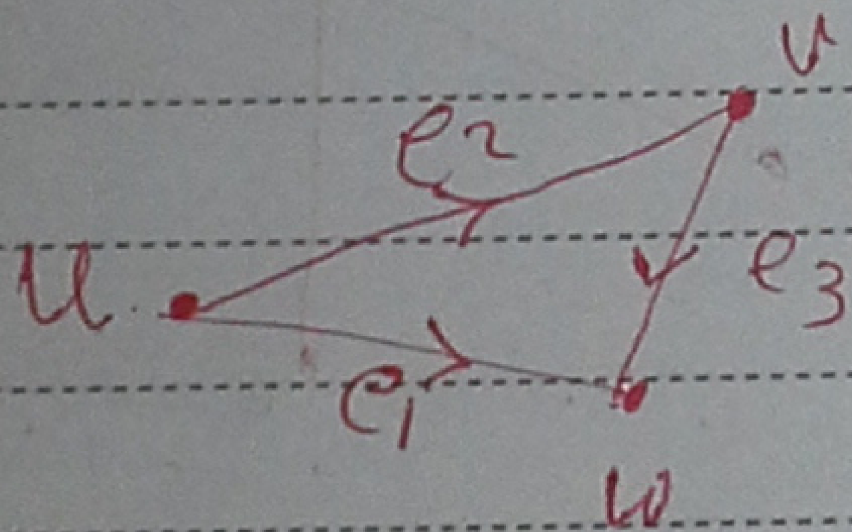


u is adjacent to v
u ; ~~inetial~~ initial vertex
v ; terminal vertex

② In-degree ($deg^-(u)$) عدد الأطراف بداخلة الرأس
The number of edges for u terminal

③ out-degree ($deg^+(u)$) عدد الأطراف الخارجة من الرأس

example: Find $deg^-(v_i)$, $deg^+(v_i)$ from the graph:-

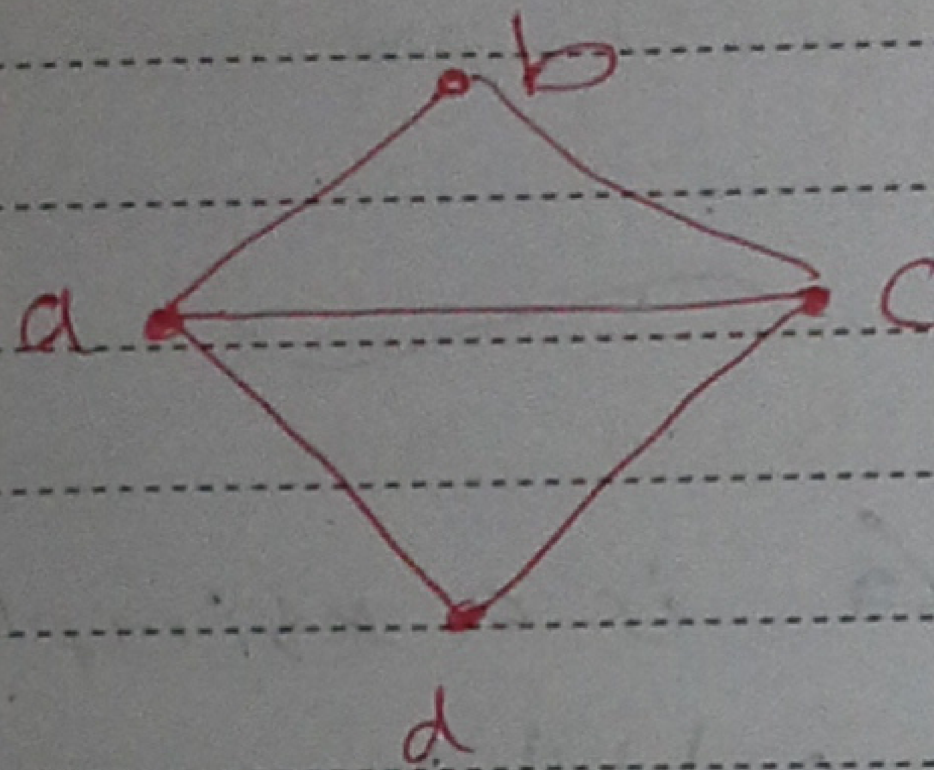


$deg^-(u) = 0$ $deg^+(u) = 2$
$deg^-(v) = 1$ $deg^+(v) = 1$
$deg^-(w) = 2$ $deg^+(w) = 0$

Hand Shaking theorem:-

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

مجموع درجات جميع الرؤوس في مخطط هي ضعف عدد الأحرف



deg(a) = 3
deg(b) = 2
deg(c) = 3
deg(d) = 2

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 3+2+3+2 = 10$$

عدد الأحرف $|E| = \frac{1}{2}(10) = 5$

Theorem:-
sum of degree for vertices of odd degree in a graph is always even

عدد الرؤوس ذات الدرجة الفردية يكون دائما زوجي

let V_1 be the set of even degree vertices.
" V_2 " " " " " odd " "

عدد الحروف
$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

V تقسم إلى جزئين في الأول $\leftarrow$ الرؤوس ذات الدرجة الزوجية V_1 + الثاني $\leftarrow$ الرؤوس ذات الدرجة الفردية V_2

$$2|E| = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

زوجي عدد زوجي عدد زوجي

Date/ Page/

عند آخر معادلة

الحد الأول لابد أن يعطي عدد زوجي لأن مجموع الأعداد الزوجية دائماً عدد زوجي، والطرف الأيسر عدد زوجي

خاص

$$\sum_{v \in V_2} deg(v) \text{ is even number}$$

Ex:

Show that if G is a simple graph

then $|E| \leq \binom{|V|}{2}$

(|E| مجموع الحدود) — توافيق

الحل

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

① نستخدم الاستنتاج الرياضي في الإثبات، نثبت العلاقة في حالة حرف واحد

② نثبت صحة العلاقة في حالة n من الرؤوس، m من الأحرف

③ نثبت صحة العلاقة في حالة (n+1) من الرؤوس

at $G = (V, E)$; $|V| = n$; $|E| = m$

$|E| = 1$; $\binom{|V|}{2} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{0!\,2!} = 1$

$|E| \leq \binom{|V|}{2}$ تتحقق المعادلة

Date/ Page/

نفرض صحة العلاقة عند n من الرؤوس

Cardinality $m \leq \binom{n}{2} \Rightarrow C_2^n$ (توافقيه)

$|V| = n$; $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$|E| = m$; $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

prove the relation at $|V| = n+1$

نضيف رأس a فيكون عدد الرؤوس بالمخطط الجديد = n+1
وعدد حروف المخطط الجديد ~~...~~ m + j حيث j هي عدد
الأحرف التي تم توصيل من المخطط (a) للرأس الجديد
ويكون هذا العدد من ① الى n $1 \leq j \leq n$

prove that

$|m+j| \leq$ ~~$\binom{n+1}{2}$~~ C_2^{n+1}

$$C_2^{n+1} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$C_2^{n} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \longrightarrow ①$$

$$C_2^{n+1} = \underbrace{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}_{\text{من } ①} + \underbrace{\frac{n}{2} + \frac{n}{2}}_{n}$$

$$C_2^{n+1} \geq m + n \geq m + j$$

then $m + j \leq C_2^{n+1}$ so.

$$|E| \leq C_2^{|V|}$$

Date/ Page/

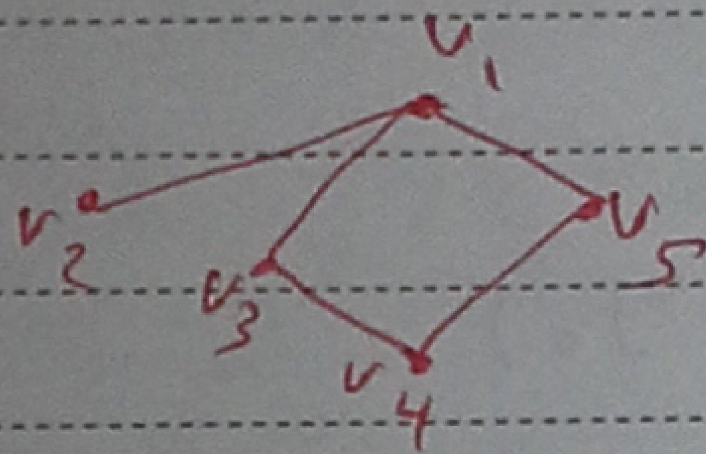
3/11/2014 الإثنين د. محمد شكري محاضرة (4)

1 Def^{n}: The neighbours of vertex

The neighbour of vertex is the set of all vertices adjacent to the vertex

$N_G(v_i)$

Ex: find $N_G(v_1)$ from the graph:



الحل

$N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$

2 Def^{n} " the neighbours of a set of vertices "

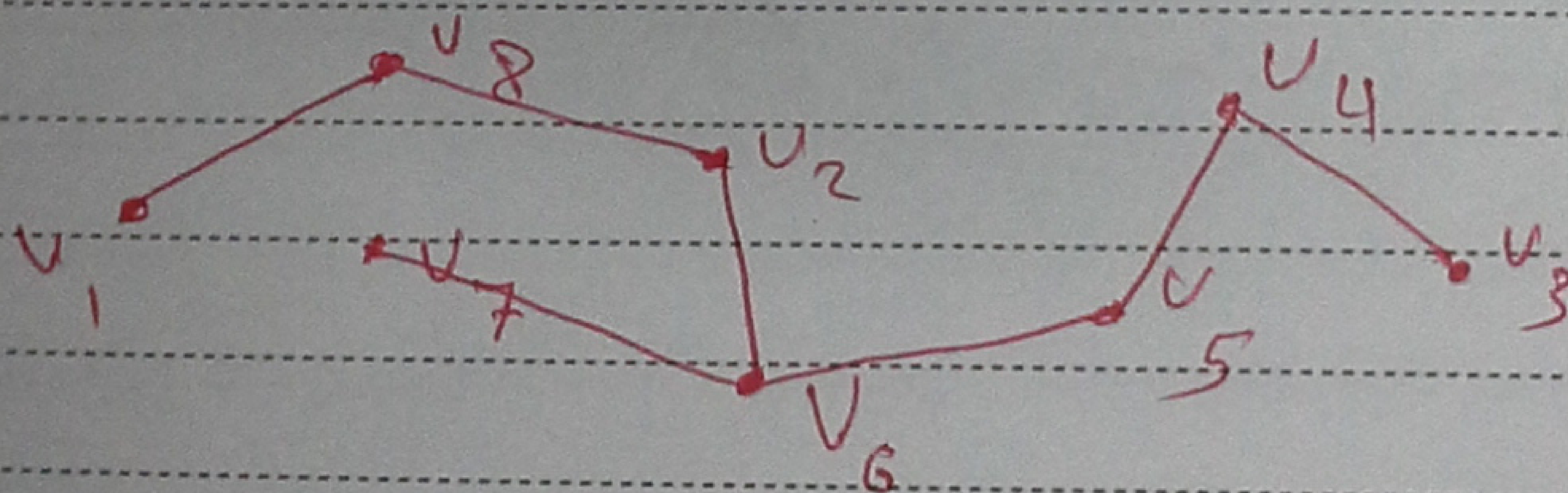
The neighbours of a set of vertices is defined as

$N_G(U) = \{v_i : v_i \in V \mid U : u_i v_i \in E \; \forall u_i \in V$

فئة U فئة جزئية من V لها من الخطوط من كل الرؤوس داخل V

التي بينها وبين رؤوس هذه الفئة أحرف مشتركة

ex: find $N_G(S)$; where $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ and $G = (V, E)$



$N_G(s) = \{v_8, v_6, v_4\}$

ناخذ المرتبط مع الفيرتكس s ولا ناخذ الرؤوس

① **Def^n: minimum degree**

If $d(v)$ is the degree of a vertex, v $\delta(G)$ is the minimum degree.

$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$

هي أقل درجة داخل رؤوس المخطط (أي نوجد درجة كل الرؤوس ونختار أصغرها.

② **Def^n: Maximum degree**

$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$

هي أكبر درجة لرأس داخل المخطط

③ **Def^n K-regular graph.**

The graph is K-regular if

$\Delta(G) = \delta(G) = K$

المخطط المنتظم تكون درجات الرؤوس جميعها متساوية

Ex: Find graphs satisfy

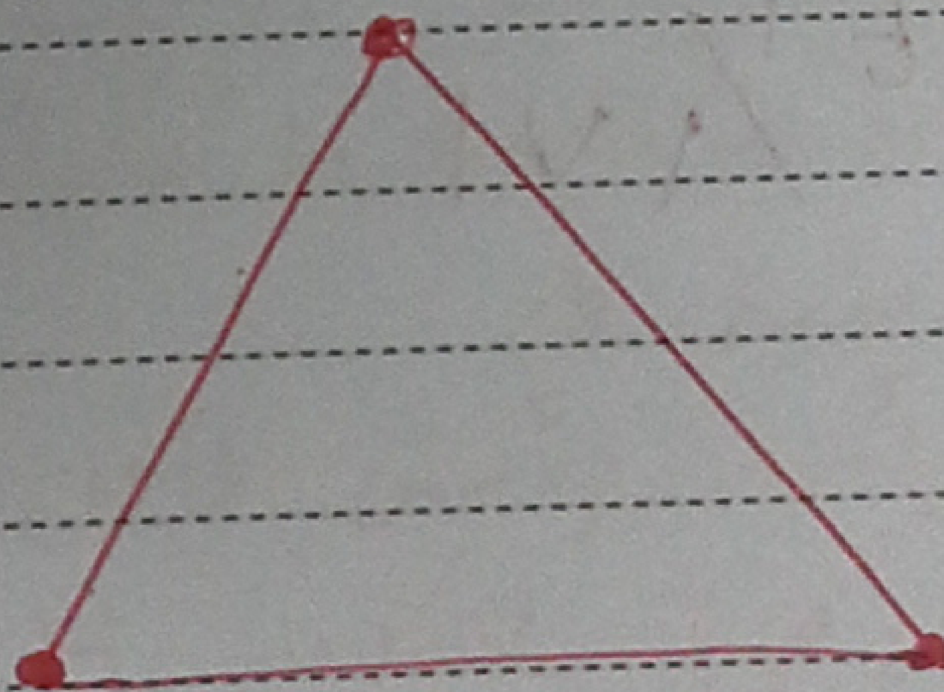
(a) 2 - regular graph.

(b) 3 - regular graph

(c) 4 - regular graph.

الحل

(a)

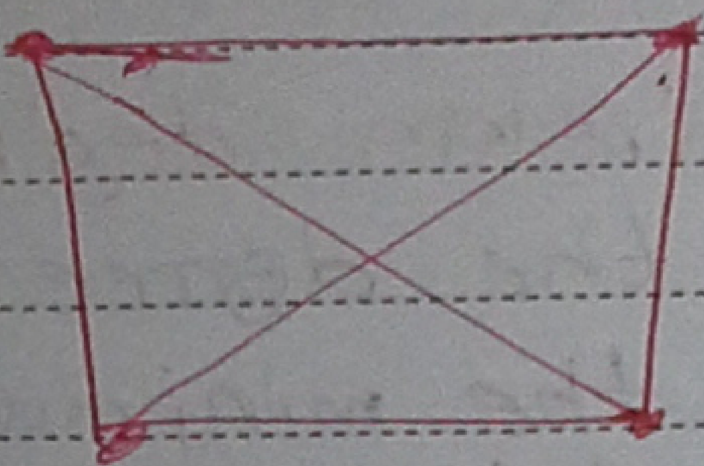


2-regular

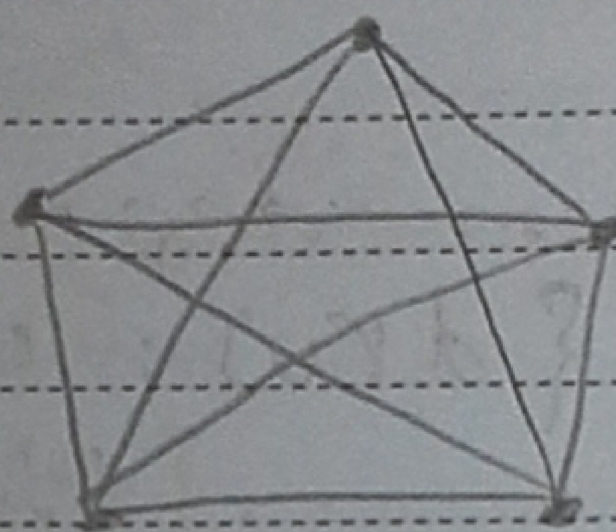
Date/ Page/

(b) 3 - regular

لاحظ على الأقل لازم عدد الرؤوس أكبر من الدرجة بـ ① على الأقل.



(C) 4 -regular



Free

④ Def$^{\underline{n}}$: the average degree of $G \equiv (V, E)$

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

$|V|$ ← عدد الرؤوس

$\sum d(v)$ ← مجموع درجات كل الرؤوس

من المثال السابق

2-regular $\Rightarrow \frac{1}{3} * (2+2+2) = \frac{6}{3} = 2$

⑤ The average Quantifies degree

$$\varepsilon(G) = |E| / |V|$$

عدد الأطراف / عدد الرؤوس

Date/ Page/

ex: prove that $\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G)$ where $\varepsilon(G)$ is average quantifies and $d(G)$ is average degree

الحل

من المحاضرة السابقة (نظرية الـ Handshake)

$$\sum d(v) = 2|E|$$

بقسمة الطرفين على $|V|$

$$\frac{1}{|V|} \sum d(v) = \frac{2|E|}{|V|}$$

↓ ↓

$$d(G) = 2\varepsilon(G)$$

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G)$$

---

proposition:

Every graph $G = (V, E)$ with at least one edge has a subgraph H with

$$\delta(H) \geq \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$$ (*)

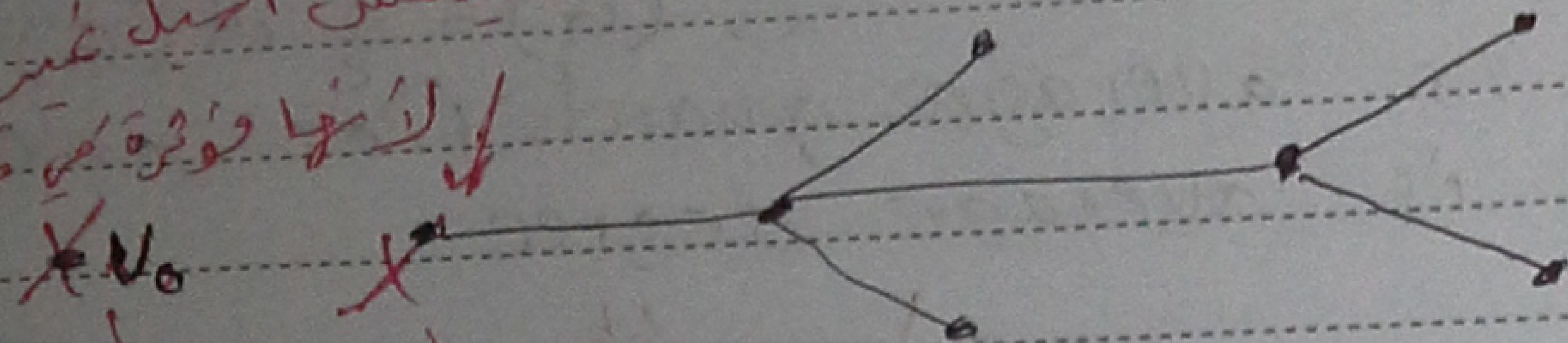
proof:

To Construct H from G delete vertices of small degree one by one, until only vertices of large degree remain.

كل مخطط له حرف واحد على الأقل يمكننا الحصول منه على مخطط جزئي H يحقق الخاصية *

* نحذف من المخطط G رأس الأقل درجة حتى نصل إلى الرؤوس ذات أكبر درجة لتكوين H

مينفعش أشيل غير لحد عندها
لأنها مؤثرة في قيمة الـ ε



$\frac{7}{8}$

$\frac{7}{9} = \varepsilon(G)$

$\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$

أقل درجة للمخطط هي $v_0 = 0$

$\varepsilon(G) = \frac{7}{9}$

عند حذف رأس؟ تزداد النسبة لأن المقام يصغر $\frac{7}{8}$

و $\frac{7}{9} < \frac{7}{8}$

Upto which degree $d(v)$ can afford to delete a vertex v, without lowering ε.

we construct a sequence

$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots\cdots G_i \supseteq G_{i+1}$ ~~st~~

(أكبر أو يساوي)

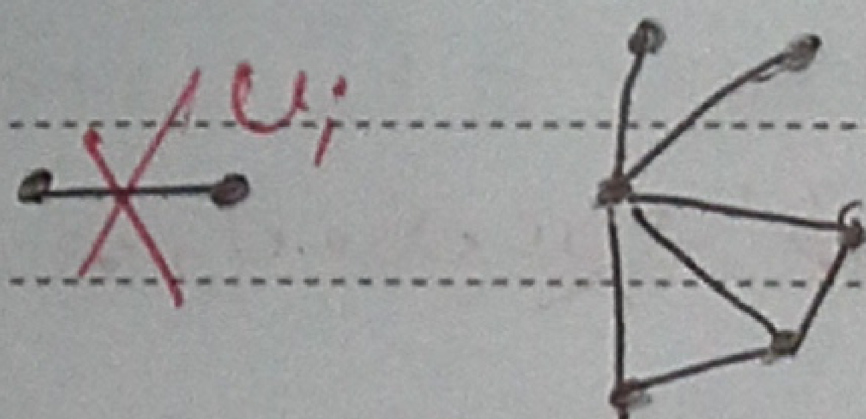
If G_i has a vertex v_i of degree

$d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$

then $G_{i+1} = G_i - v_i$; ~~$H = G_i$~~ $H = G_{i+1}$

if $\varepsilon(G_{i+1}) > \varepsilon(G_i)$ then

$H = G_i$



So ~~that~~ there exist H satisfy eqn (*)

راجع الصفحة السابقة

Date/ Page/

إذا وجد رأس من أقل الدرجات في المخطط تحقق أن ~~$d(v_i$~~

$d(v_i) < \varepsilon(G_i)$

نحذف هذه الرأس ويكون المخطط الجديد هو

$H = G_{i+1}$

وإذا تحقق أن $\varepsilon(G_i) > \varepsilon(G_{i+1})$

نضع

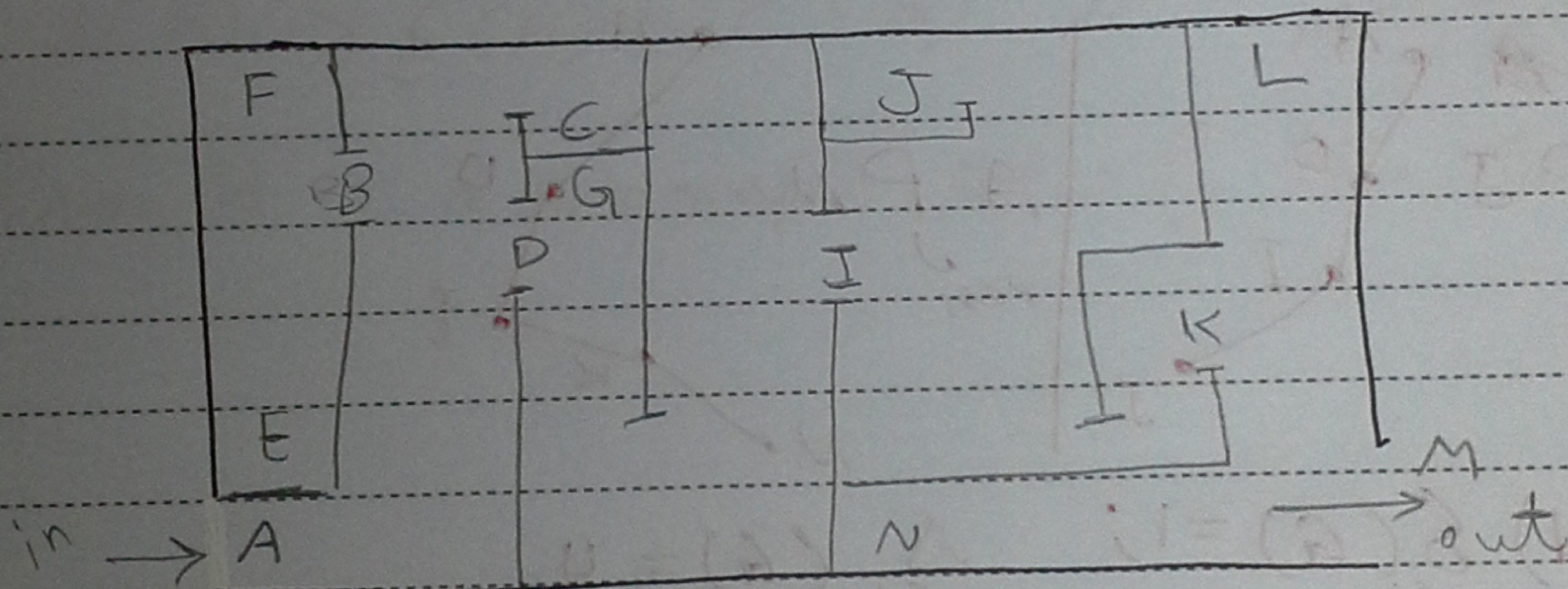
$H = G_i$

(لو نضع وطلع تأثير على ε تكون الجديدة هي H)

(إذا لم ينفع وأثرت على ε تكون القديمة هي H)

example

a person visit a shoping center with seven departments A, B, C ---, M as in figure



a) find the graph which edges are away of moving between departments

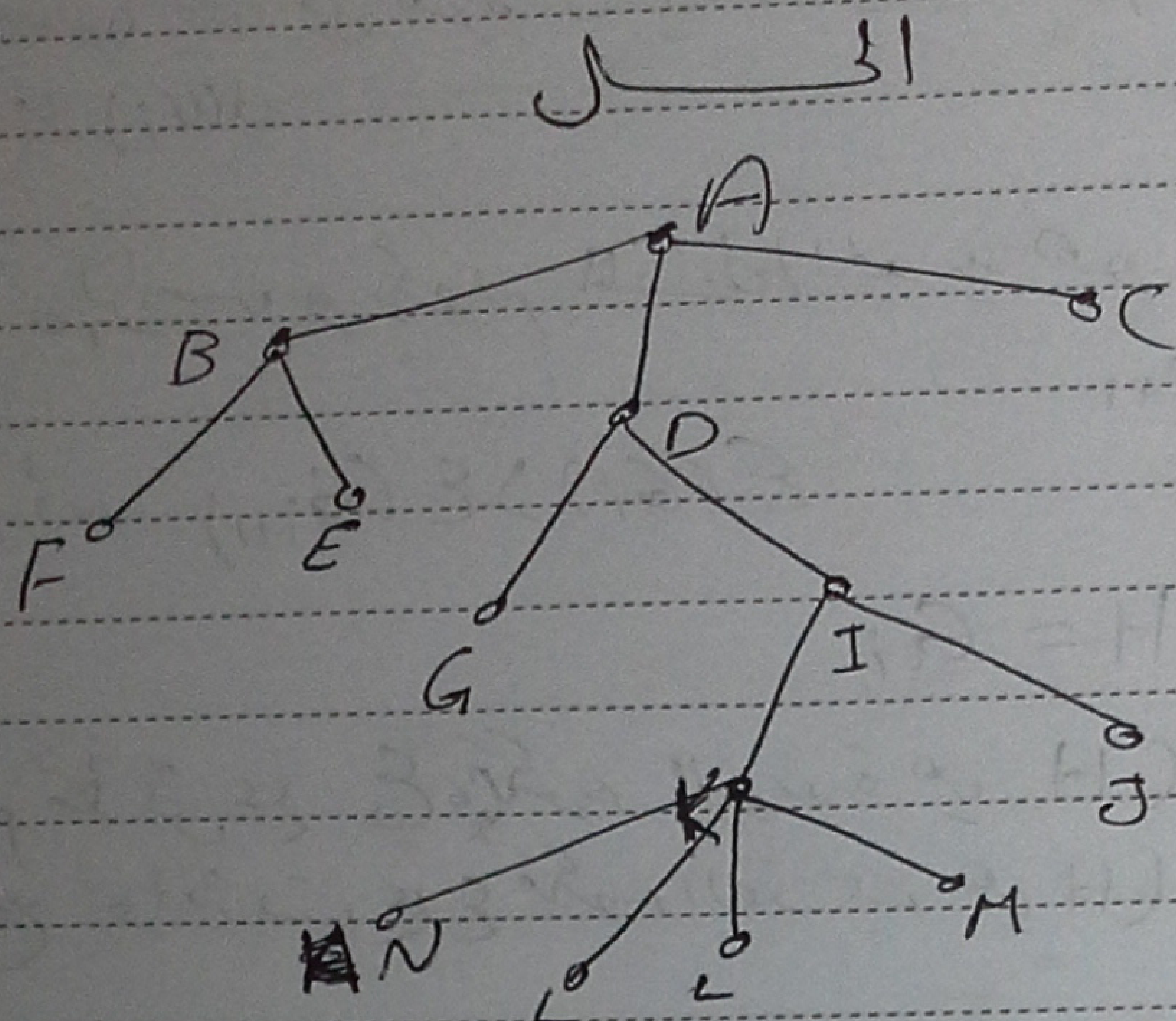
b) from the graph, find the node with maximal number of examining department moving.

c) Find the path between A and N, A and J from the graph

d) $\delta(G)$, $\Delta(G)$, $\varepsilon(G)$, $d(G)$

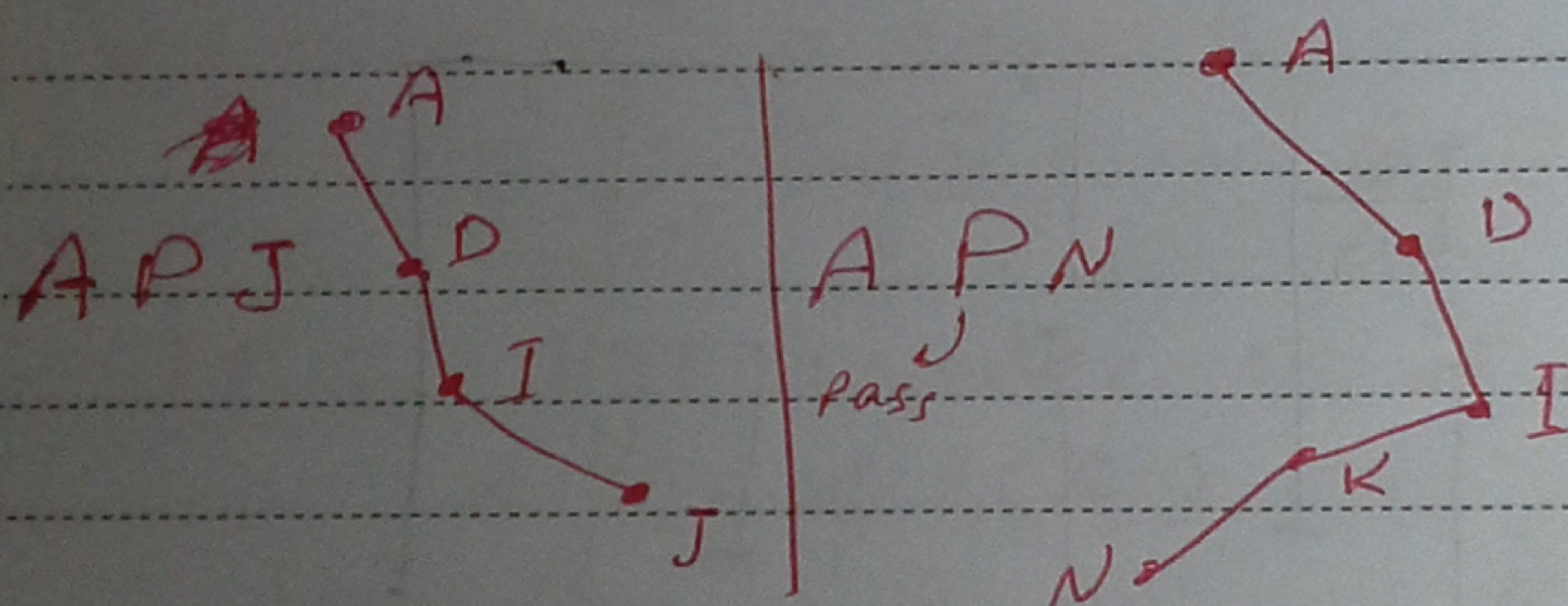
الحل

a)



b) Node K is max examining department

c) The path Betwen A and N



d) $\delta(G) = 1$; أقل درجة $\Delta(G) = 4$ أكبر درجة

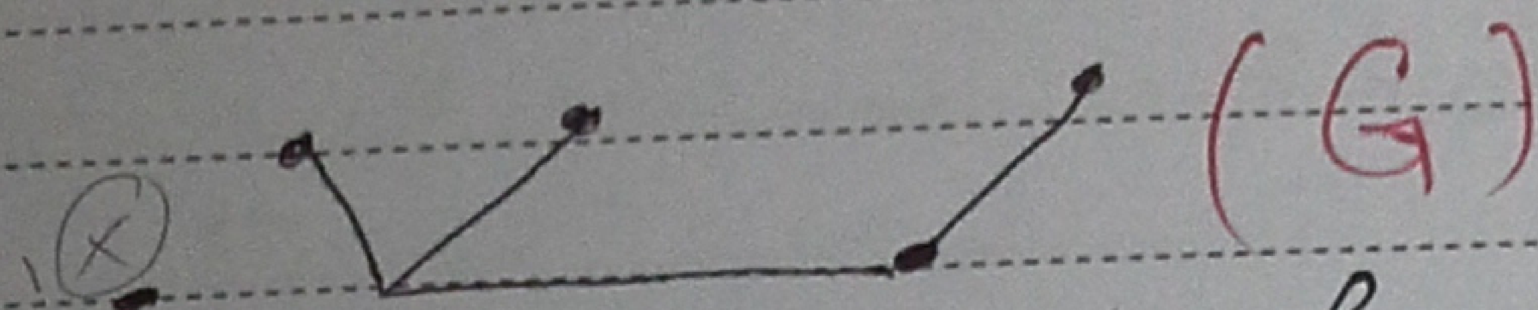
$\varepsilon(G) = \frac{12}{13}$ حروف / رؤوس

$d(G) = \frac{1}{13}[3+3+3+1+1+1+1+3+1+4+1+1+1]$

(A B D C E F G I J K N L M)

Date/ Page/

Ex: from the graph G



find a subgraph H satesfies

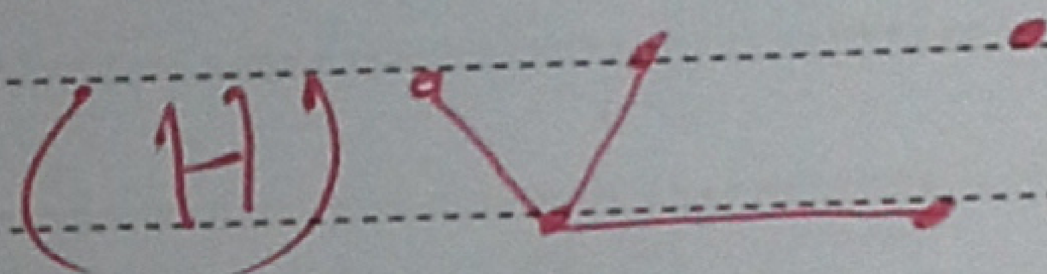
$\delta(H) \geq \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$

الحل

① $\varepsilon(G) = \frac{4}{6}$ $\delta(G) = 0$

نحذف أقل درجة في الرؤوس

② $\delta(H) = 1$



$\varepsilon(H) = \frac{4}{5}$

$\delta(H) \geq \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ ✓✓ الشرط تحقق

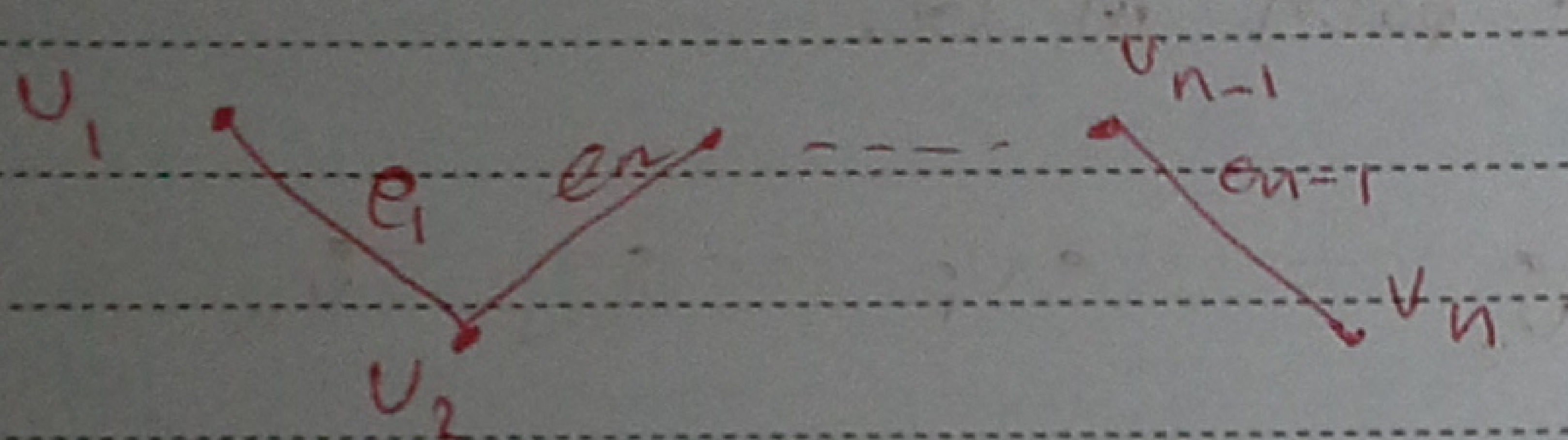
Then H is a subgraph satisfy the Condition

محاضرة [6]   د. محمد شكري   الاثنين   17/11/2014

Path and cycles :-   المسار والمسار المغلق

Def^n (Path)

[1] ~~A path~~ A path in a graph $P = (V, E)$
$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$; $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ Linked v_1 to v_n.

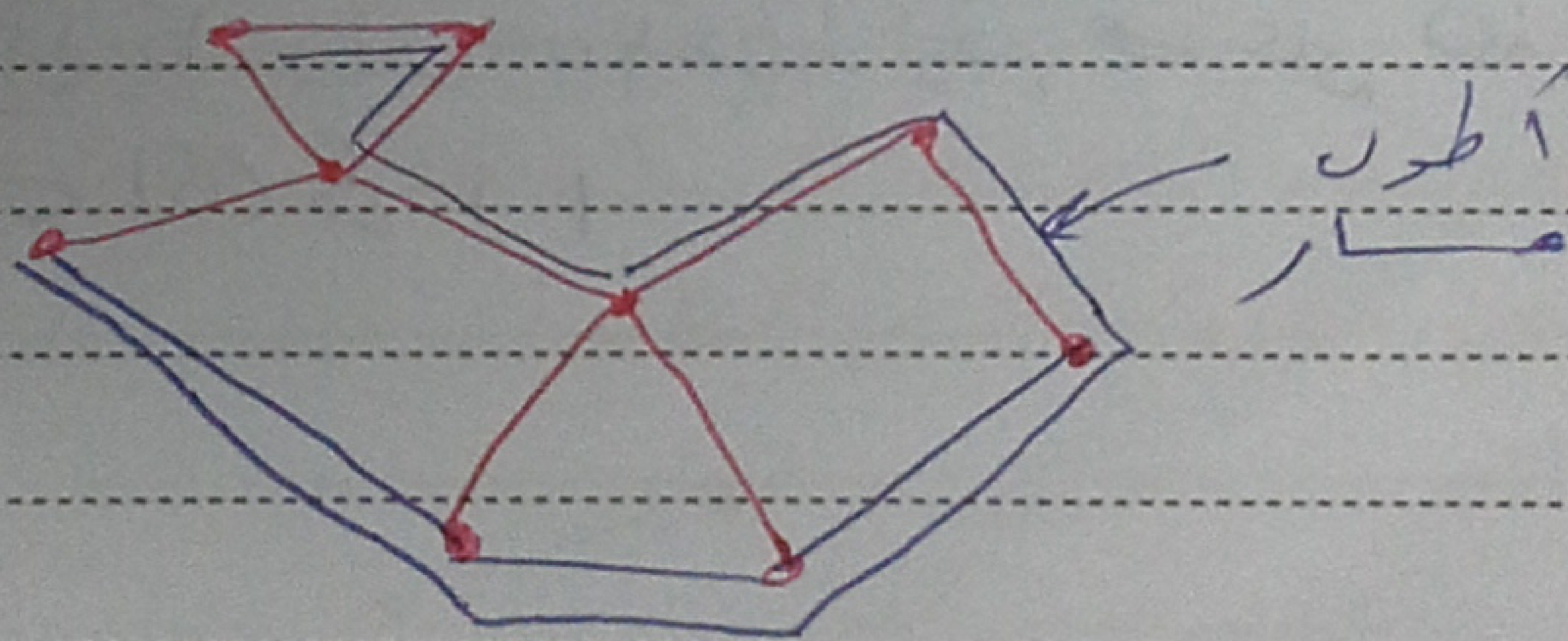


(2) A cycle C^n
Is a path with $v_1 = v_n$.

يسمى تقطيعه
* المسار في مخطط هو جزء من المخطط يشترط فيه ألا يمر على الرأس مرتين أو على حرف واحد مرتين.

* عند تعميم هذه الخاصية يسمى الـ path ← walk وهو:
يعني أنه في الـ walk ممكن تكرار الرؤوس والأحرف.

* المسار المغلق هو مسار نقطة بدايته هي نقطة نهايته.



Date/ Page/

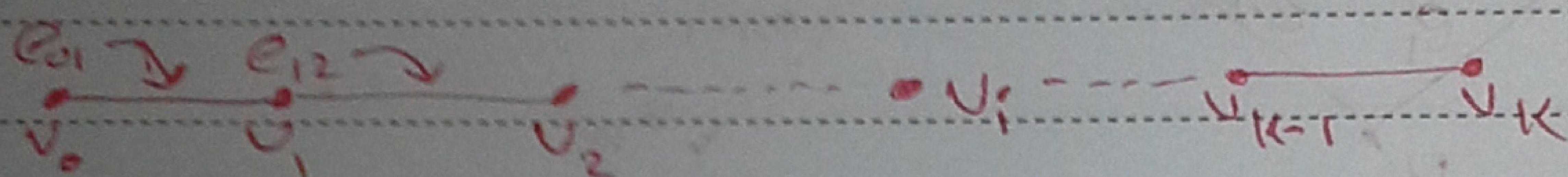
Proposition:-

Every graph G can contain a path of length $\delta(G)$ and a cycle of length $\delta(G)+1$ " $\delta(G) \geq 2$ "

$\delta(G)$ أقل درجة في G

طول المسار = عدد ال edges عليه
الي فيها

Let $P = v_0 e_{01} v_1 e_{12} --- e_{k-1} v_k$ be the largest path in G.



طول المسار K

$K \geq d(v_i) \geq \delta(G) \Rightarrow$ ①

* نفرض مسار طوله K والنقطة v_i تقع على هذا المسار، إذا كانت v_i مرتبطة بجميع رؤوس المسار أو أكبر عدد منها فإن العلاقة ① تتحقق

*

* إذا كانت أقل درجة هي $\delta(G)$ فمن المؤكد أن يكون هناك على عدد δ من الرؤوس مرتبطة بـ v_i أي أنه يعكس على مسار جزئي طوله $\delta(G)$

* وحيث أنه المسار يرجع كل رؤوس بالخطط يتم غلق هذا المسار بحرف فيكون طوله $\delta(G) + 1$

$k \geq d(v_i) \geq \delta(G)$ (1)

if $v_i \in P$ for all $i = 1, 2, \cdots, k$
all neigbours of v_i satisfies (1)

if $i < k$ is a minimal with $e_{ik} \in E(P)$
Then P is a cycle of Length at least $\delta(G+1)$.

* محيط الشكل هو طول ال Closed path

Def^n Grith - Circumference :-

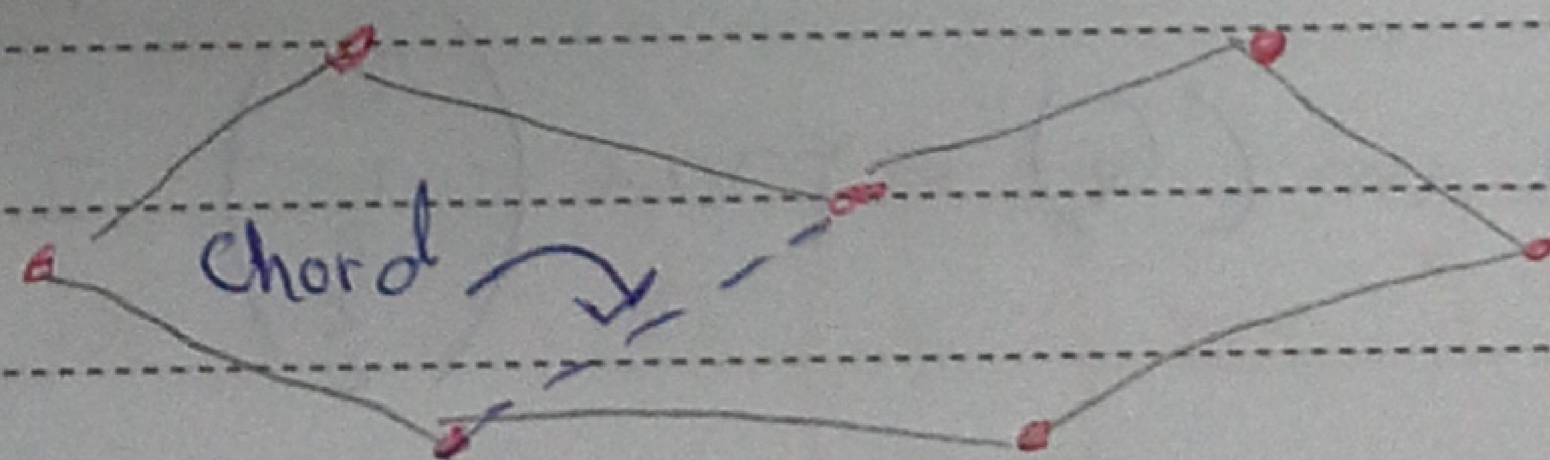
- The minimum Length of a cycle ~~cont~~ ~~Continue~~ (Contained) in a graph G is th grith $g(G)$ of G

- the maximum Length of acycle in G is its Circumference.

* طول أصغر مسار مغلق يسمى Grith
، أكبر ، ، محيط الشكل

Def (chord) :-

هو حرف مضاف للمسار المغلق بحيث ينتج عنه مسار مغلق أقل منه في الطول

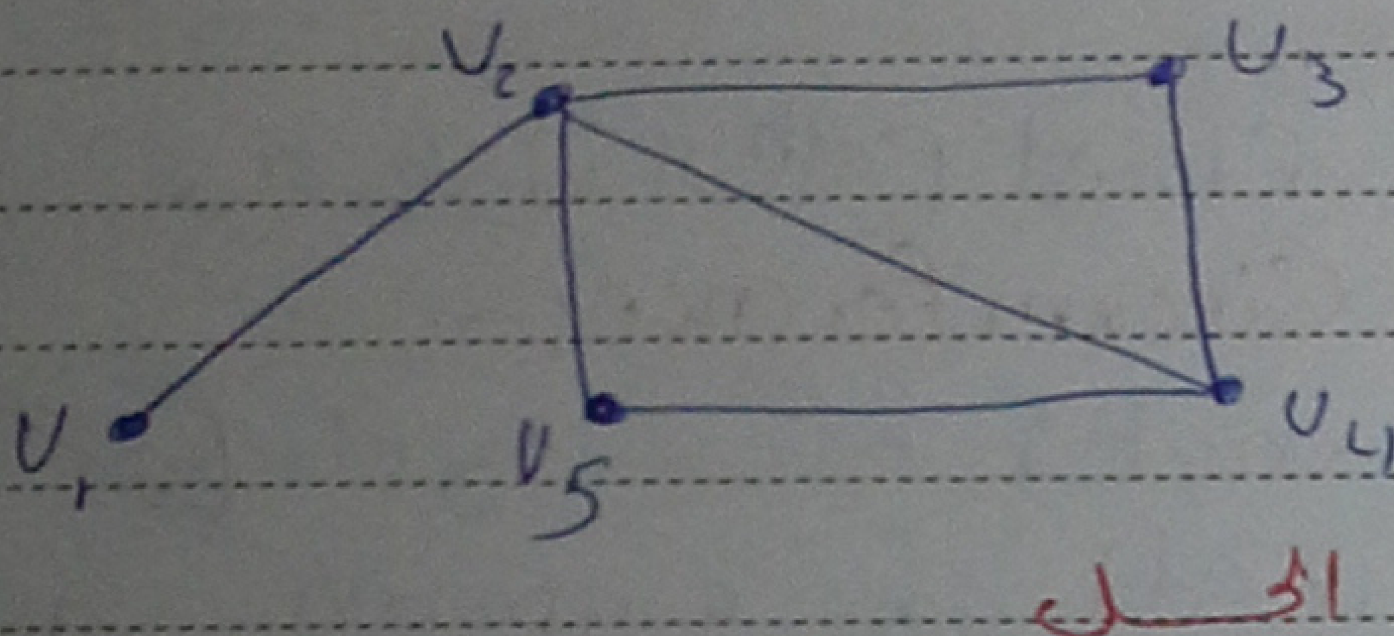


وهذا الحرف المضاف لا يكون من ضمن أحرف المسار المغلق

Def (Diameter of G)
the greatest distance between any two vertices in G is th Diameter of G

هو طول أكبر مسافة بين أبعد نقطتين في الـ G

example:-
Find the diameter of the graph



الحل

The distance Matrix.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	2	2	2
v_2	1	0	1	1	1
v_3	2	1	0	1	2
v_4	2	1	1	0	1
v_5	2	1	2	1	0

أصغر مسافة بين الرأس والرأس اللي جنب عنده

⟹ max $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ → v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

أكبر مسافة عند كل Vertex

~~diameter~~ $diam(G) = max \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$

Def$^{(n)}$ (Radius)

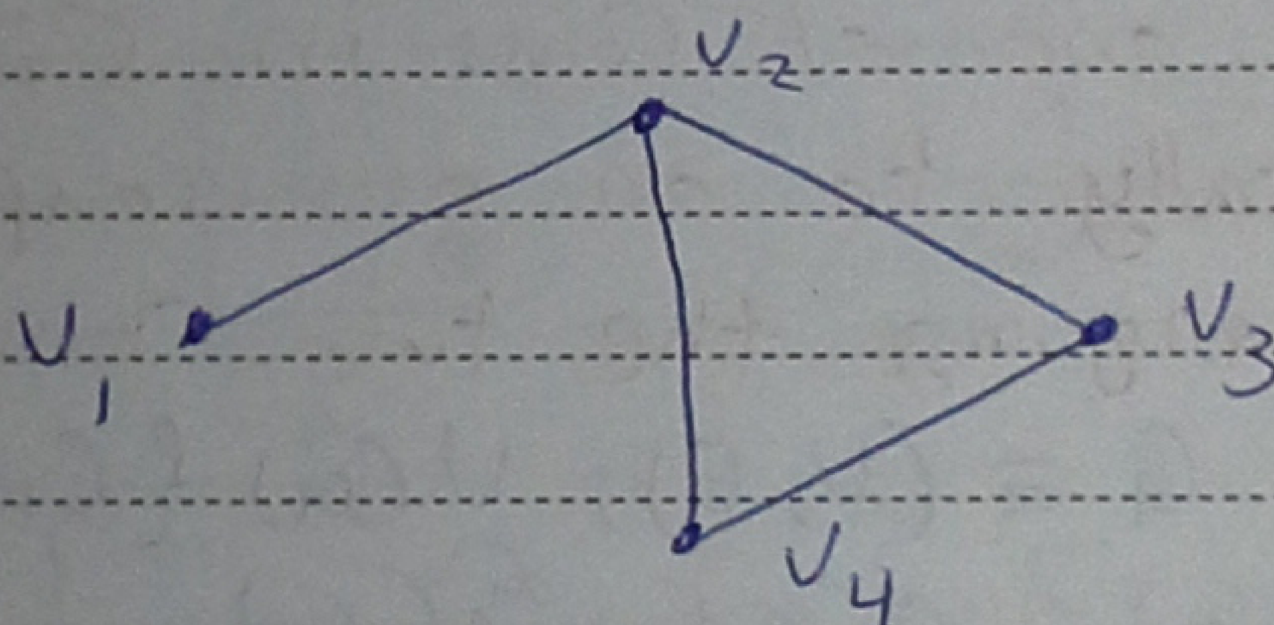
$$rad(G) = \min\left(\max_{x \in V(G),\ y \in V(G)} d_G(x,y)\right)$$

يعرف نصف قطر المخطط بأنك أصغر (أكبر مسافة)

~~$rad(G) = \min \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$~~

Example: Find the radius of the following graph

⇛ graph



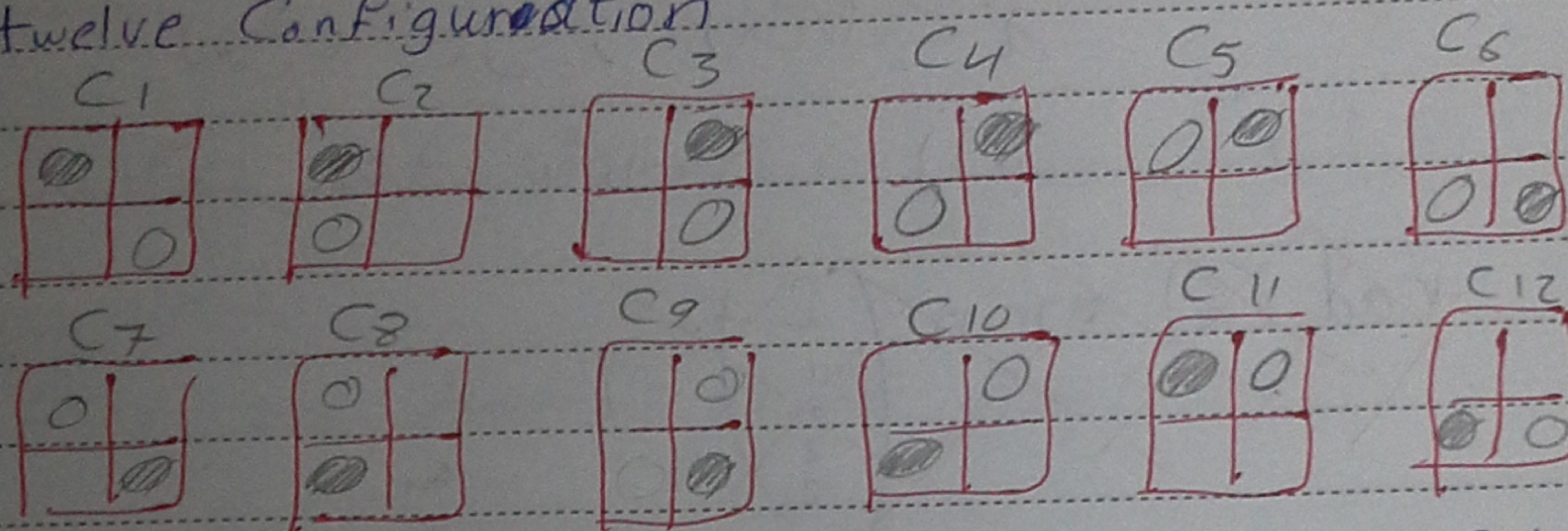
the Distance Matrix

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	2	2
v_2	1	0	1	1
v_3	2	1	0	1
v_4	2	1	1	0

$\Rightarrow \max \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$rad\ G = \min \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

Ex: Suppose that we have two Coins, one silver and one gold, placed on two of four Square 2x2 check board. These are twelve Configuration



where "●" is gold Coin; "○" is silver Coin

A configuration can be transformed into other according to rules:-

1. move one of Coins in C_i horizontally or vertically to an unoccupied squar.
2. interchanging the two Coins in C_i Configuration

a) F in $G \equiv (V, E)$; $V(G)$ $\{C_1, C_2, \ldots C_{12}\}$

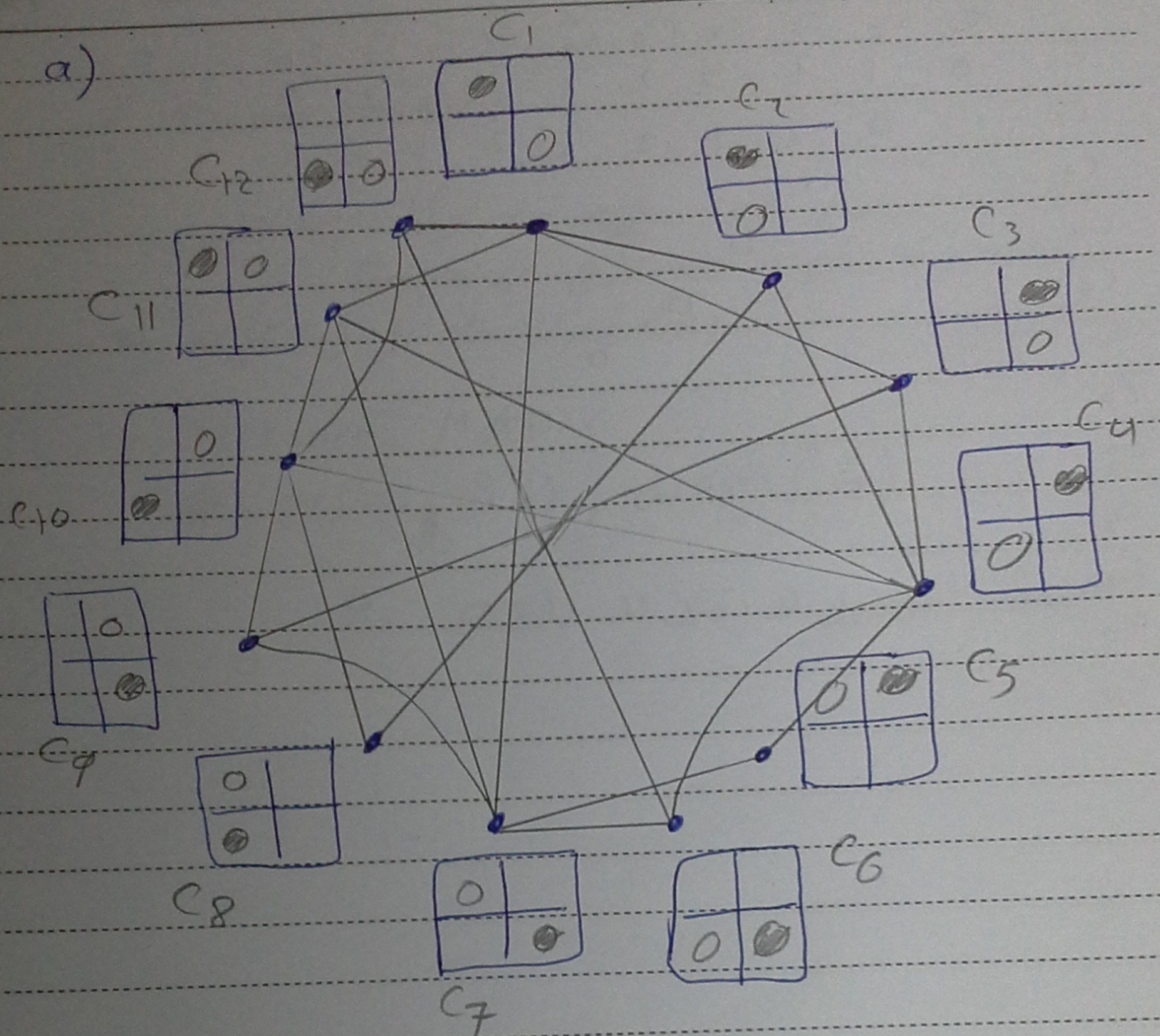
b) $N_G(C_5)$; $\Delta(G)$, $\delta(G)$

c) distance matrix

d) grith $g(G)$, $diam(G)$

⟶ Solution

a)



b) $N_G(5) = \{C_4, C_7, C_{11}\}$ C_5 الحركات الممكنة بعد

$\Delta(5) = 5.$

$\delta(G) = 3$

⟹ Continue

Date/ Page/

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
c_1	0	1	1	2	2	2	1	2	2	2	1	1
c_2		0	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1
c_3			0									
c_4				0								
c_5					0							
c_6						0						
c_7							0					
c_8								0				
c_9									0			
c_{10}										0		
c_{11}											0	
c_{12}												0

Home Work

على لوحة شطرنج 3x3 ~~أوجد~~ أوجد الحركات الممكنة للوزير والملك
من هذه الحركات تبع قواعد الشطرنج جد Graph
أوجد $N_G(C_5)$; $\Delta(G)$, $\delta(G)$

Distance Matrix

) grith, $g(G)$, $diam(G)$

بحيث الوزير لا يقتل الملك